# Tema 6
# Problemas

Alfonso V. Ramallo

**[1]** Un oscilador armonico simple unidimensional esta inicialmente en $t = 0$ en el estado:

$$|\psi(0)\rangle \, = \, N \sum_{n=0}^{\infty} c^n \, |n\rangle \ ,$$

siendo $c$ y $N$ constantes complejas y $|n\rangle$ es el $n$-esimo autoestado de la energia del oscilador.

a) Obtenganse los posibles valores del parametro $c$ y de la constante de normalizacion $N$.

b) Obtengase el estado $|\psi(t)\rangle$ para el instante de tiempo $t > 0$ y el valor medio de la energia en dicho estado.

c) Calculese la probabilidad de encontrar el sistema en $t > 0$ en el mismo estado en el que se encontraba en $t = 0$.

**Solucion**

(a) Impongamos la condicion de normalizacion. Puesto que:

$$|\psi(0)\rangle \, = \, N \sum_{n=0}^{\infty} c^n \, |n\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\psi(0)| \, = \, N^* \sum_{m=0}^{\infty} \big(c^*\big)^m \, |m\rangle \ ,$$

entonces:

$$\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle \, = \, \big|N\big|^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \big(c^*\big)^m \, c^n \, \langle m|n\rangle \, = \, \big|N\big|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \big|c\big|^n \ ,$$

donde hemos utilizado que los $\{|n\rangle\}$ son una base ortonormal y, por consiguiente, se verifica que $\langle m|n\rangle \, = \, \delta_{mn}$. La suma anterior es una suma geometrica en potencias de $\big|c\big|$. Esta serie se puede sumar, es decir es convergente, si:

$$\boxed{\big|c\big| < 1}$$

En ese caso:

$$\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle \, = \, \big|N\big|^2 \, \frac{1}{1 \, - \, \big|c\big|^2} \, = \, 1 \ .$$

Entonces, tomando la constante de normalizacion $N$ real, obtenemos:

$$\boxed{N \,=\, \sqrt{1\,-\,\left|c\right|^2}} \qquad\qquad (\left|c\right| < 1)$$

(b) El estado inicial es:

$$|\psi(0)\rangle \,=\, \sqrt{1\,-\,\left|c\right|^2}\,\sum_{n=0}^{\infty} c^n\,|n\rangle\;, \qquad\qquad (\left|c\right| < 1)$$

Para obtener el estado a $t > 0$ hagamos la substitucion:

$$|n\rangle \,\to\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,E_n\,t}\,|n\rangle\;.$$

Teniendo en cuenta que para el oscilador armonico $E_n \,=\, \hbar\omega\,(n+\frac{1}{2})$ y, por consiguiente:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\,E_n\,t} \,=\, e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,e^{-i\,n\,\omega\,t}\;,$$

entonces

$$|n(t)\rangle \,=\, e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,e^{-i\,n\,\omega\,t}\,|n\rangle\;.$$

En consecuencia el vector de estado para $t > 0$ es:

$$\boxed{|\psi(t)\rangle \,=\, \sqrt{1\,-\,\left|c\right|^2}\,e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,\sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\,n\,\omega\,t}\,c^n\,|n\rangle}$$

Calculemos el valor medio de la energia:

$$\langle\,H\,\rangle \,=\, \sqrt{1\,-\,\left|c\right|^2}\,e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,\sum_{n=0}^{\infty} e^{-in\omega\,t}\,c^n\,\langle\psi(t)|H|n\rangle$$

Teniendo en cuenta que $H|n\rangle \,=\, E_n\,|n\rangle$, obtenemos:

$$\langle\psi(t)|H|n\rangle \,=\, \hbar\,\omega\,\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\,\langle\psi(t)|n\rangle\;,$$

y por lo tanto:

$$\langle\,H\,\rangle \,=\, \hbar\,\omega\,\sqrt{1\,-\,\left|c\right|^2}\,e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,\sum_{n=0}^{\infty}\,\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\,e^{-i\,n\,\omega\,t}\,c^n\,\langle\psi(t)|n\rangle\;.$$

Calculemos ahora $\langle\psi(t)|n\rangle$:

$$\langle\psi(t)|n\rangle \,=\, \sqrt{1\,-\,\left|c\right|^2}\,e^{\frac{i\omega}{2}\,t}\,\sum_{m=0}^{\infty} e^{i\,m\,\omega\,t}\,\big(c^*\big)^m\,\langle m|n\rangle \,=\, \sqrt{1\,-\,\left|c\right|^2}\,e^{\frac{i\omega}{2}\,t}\,e^{i\,n\,\omega\,t}\,\big(c^*\big)^n\;,$$

y, entonces:

$$\langle\, H \,\rangle \;=\; \hbar\,\omega\,\Big(1-|c|^2\Big)\,\sum_{n=0}^{\infty}\,\big(n+\frac{1}{2}\big)\,\big|c\big|^{2n}\;. \tag{0.1}$$

Para cualquier $x \in \mathbb{C}$ tal que $|x| < 1$, calculemos la suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,x^n \;=\; x\,\frac{d}{dx}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big] \;=\; x\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-x}\Big) \;=\; \frac{x}{(1-x)^2}\;. \tag{0.2}$$

Tomando $x = |c|^2$, obtenemos la suma que necesitamos para calcular $\langle\, H \,\rangle$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,|c|^{2n} \;=\; \frac{|c|^2}{(1-|c|^2)^2}\;.$$

Usando tambien que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c|^{2n} \;=\; \frac{1}{1-|c|^2}\;,$$

podemos calcular $\langle\, H \,\rangle$:

$$\langle\, H \,\rangle \;=\; \hbar\,\omega\,\Big(1-|c|^2\Big)\left[\frac{|c|^2}{(1-|c|^2)^2} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-|c|^2}\right] \;=\; \hbar\,\omega\,\Big[\frac{|c|^2}{1-|c|^2} \;+\; \frac{1}{2}\Big]\;.$$

Simplificando, obtenemos:

$$\boxed{\langle\, H \,\rangle \;=\; \frac{\hbar\omega}{2}\,\frac{1+|c|^2}{1-|c|^2}}$$

(c) La amplitud de que el sistema vuelva al estado inicial despues de un tiempo $t$ es:

$$\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle \;=\; (1-|c|^2)\sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,e^{-i\,n\,\omega\,t}\,(c^*)^n\,c^n\,\langle m|n\rangle \;=$$

$$=\; (1-|c|^2)\,e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,\sum_{n=0}^{\infty} |c|^{2n}\,e^{-i\,n\,\omega\,t}\;.$$

Usando que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c|^{2n}\,e^{-i\,n\,\omega\,t} \;=\; \frac{1}{1\;-\;|c|^2\,e^{-i\,\omega\,t}}\;,$$

llegamos a:

$$\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle \;=\; e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,\frac{1-|c|^2}{1\;-\;|c|^2\,e^{-i\,\omega\,t}}\;.$$

La probabilidad buscada es:

$$P(t) \;=\; \Big|\,\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle\,\Big|^2 \;=\; \frac{\big(1-|c|^2\big)^2}{\big(1\,-\,|c|^2\,e^{-i\,\omega\,t}\big)\big(1\,-\,|c|^2\,e^{i\,\omega\,t}\big)}\ .$$

Calculemos el denominador de esta expresion:

$$\big(1\,-\,|c|^2\,e^{-i\,\omega\,t}\big)\big(1\,-\,|c|^2\,e^{i\,\omega\,t}\big) \;=\; 1\,-\,|c|^2\,e^{i\,\omega\,t}\,-\,|c|^2\,e^{-i\,\omega\,t}\,+\,|c|^4 \;=$$

$$= 1\,-\,2\,|c|^2\cos(\omega\,t)\,+\,|c|^4 \;=\; (1-|c|^2)^2\,+\,4\,|c|^2\,\mathrm{sen}^{\,2}\frac{\omega\,t}{2}\ ,$$

donde hemos utilizado la formula del coseno del angulo doble ($\cos x = 1 - 2\,\mathrm{sen}^{\,2}\frac{x}{2}$). Entonces $P(t)$ puede escribirse como:

$$\boxed{P(t) \;=\; \frac{1}{1\,+\,\frac{4\,|c|^2}{(1-|c|^2)^2}\,\mathrm{sen}^{\,2}\frac{\omega\,t}{2}}}$$

**[2]** Un oscilador armonico simple unidimensional de frecuencia $\omega$ se encuentra en el instante inicial $t=0$ en el estado:

$$|\psi(0)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\,+\,\frac{2}{\sqrt{5}}|2\rangle\ ,$$

siendo $|n\rangle$ el autoestado del hamiltoniano con autovalor $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$.

a) Obtenganse los valores medios de la posicion $x$ y del momento $p$ para $t>0$.

b) Compruebese que el resultado obtenido en el apartado anterior esta de acuerdo con el teorema de Ehrenfest.

**Solucion**

(a) Los vectores $|n\rangle$ son estados estacionarios que tienen un valor bien definido de la energia igual a $E_n \,=\, \hbar\omega\,(n+\frac{1}{2})$. El vector de estado $|\psi(0)\rangle$ es una superposicion de dichos vectores. Por lo tanto, su evolucion temporal es:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{e^{-\frac{3\,i\,\omega\,t}{2}}}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\,+\,\frac{2}{\sqrt{5}}\,e^{-\frac{5\,i\,\omega\,t}{2}}\,|2\rangle\ ,$$

cuyo dual es el bra:

$$\langle\psi(t)| \;=\; \frac{e^{\frac{3\,i\,\omega\,t}{2}}}{\sqrt{5}}\,\langle 1|\,+\,\frac{2}{\sqrt{5}}\,e^{\frac{5\,i\,\omega\,t}{2}}\,\langle 2|\ .$$

Por otra parte, los operadores posicion $x$ y momento $P$ pueden escribirse en terminos de los operadores escalera en la forma:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\left(a + a^\dagger\right) , \qquad P = i\sqrt{\frac{\hbar\,m\,\omega}{2}}\left(a^\dagger - a\right) .$$

Para obtener los valores medios de $X$ y $P$, calculemos los elementos de matriz $\langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle$ y $\langle\psi(t)|a^\dagger|\psi(t)\rangle$. Tengamos para ello en cuenta que $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ y que $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$. Entonces:

$$\langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle = \frac{e^{\frac{3\,i\,\omega\,t}{2}}}{\sqrt{5}}\,\frac{2}{\sqrt{5}}\,e^{-\frac{5\,i\,\omega\,t}{2}}\,\langle 1|a|2\rangle .$$

Puesto que $\langle 1|a|2\rangle = \sqrt{2}$, obtenemos:

$$\langle\psi(t)|a|\psi(t)\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{5}\,e^{-i\,\omega\,t} .$$

De la misma forma:

$$\langle\psi(t)|a^\dagger|\psi(t)\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\,e^{\frac{5\,i\,\omega\,t}{2}}\,\frac{e^{-\frac{3\,i\,\omega\,t}{2}}}{\sqrt{5}}\,\langle 2|a^\dagger|1\rangle .$$

Simplificando, obtenemos:

$$\langle\psi(t)|a^\dagger|\psi(t)\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{5}\,e^{i\,\omega\,t} .$$

Entonces:

$$\langle X\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\langle\psi(t)|\big(a + a^\dagger\big)\,|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\frac{2\sqrt{2}}{5}\left[e^{i\,\omega\,t} + e^{-i\,\omega\,t}\right] .$$

Entonces el valor medio de $x$ es:

$$\boxed{\langle X\rangle = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega}}\;\cos\omega\,t}$$

De la misma manera el valor medio del momento es:

$$\langle P\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\,m\,\omega}{2}}\,\langle\psi(t)|\big(a^\dagger - a\big)\,|\psi(t)\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar\,m\,\omega}{2}}\,\frac{2\sqrt{2}}{5}\left[e^{i\,\omega\,t} - e^{-i\,\omega\,t}\right] ,$$

que, una vez simplificado da:

$$\boxed{\langle P\rangle = -\frac{4}{5}\sqrt{\hbar\,m\,\omega}\;\text{sen}\;\omega\,t}$$

(b) Comprobemos el teorema de Ehrenfest para la evolucion temporal de los valores medios de $X$ y $P$. Las ecuaciones a comprobar son:

$$\frac{d\langle X\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left\langle [X,H]\right\rangle \ , \qquad\qquad \frac{d\langle P\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\left\langle [P,H]\right\rangle \ .$$

En este caso el hamiltoniano es:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}X^2 \ .$$

y las coordenada y el momento satisfacen la relacion canonica de conmutacion $[X,P] = i\hbar$. Calculemos los conmutadores necesarios para verificar el teorema de Ehrenfest. El primero de estos conmutadores es:

$$[X\ ,\ H] = \frac{1}{2m}[X,P^2] = \frac{1}{2m}2\,i\,\hbar\,P = \frac{i\hbar}{m}P \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{i}{\hbar}\left\langle [X,H]\right\rangle = \frac{\langle P\rangle}{m} \ .$$

Asi pues, la primera ecuacion que debemos comprobar es:

$$\frac{d\langle X\rangle}{dt} = \frac{\langle P\rangle}{m} \ .$$

Calculemos el primer miembro a partir del valor esperado de $X$ que hemos obtenido:

$$\frac{d\langle X\rangle}{dt} = \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega}}\,(-\omega)\,\mathrm{sen}\,\omega\,t = -\frac{4}{5}\sqrt{\frac{\hbar\,\omega}{m}}\,\mathrm{sen}\,\omega\,t \ ,$$

que ciertamente coincide con $\langle P\rangle/m$. De forma similar:

$$[P,H] = \frac{1}{2}m\,\omega^2\,[P,X^2] = m\,\omega^2\,[P,X]\,X = -i\,\hbar\,m\,\omega^2\,X \ ,$$

y la ecuacion de Ehrenfest es:

$$\frac{d\langle P\rangle}{dt} = -\frac{i}{\hbar}(-i\,\hbar\,m\,\omega^2)\langle X\rangle \ ,$$

que simplificando da:

$$\frac{d\langle P\rangle}{dt} = -m\,\omega^2\,\langle X\rangle \tag{0.3}$$

Calculemos de nuevo el primer miembro derivando con respecto a tiempo el valor esperado de $P$:

$$\frac{d\langle P\rangle}{dt} = -\frac{4}{5}\sqrt{\hbar\,m\,\omega}\,\omega\,\cos\omega\,t = -m\,\omega^2\Big[\frac{4}{5}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\cos\omega t\Big] \ ,$$

que es igual a $-m\,\omega^2\,\langle X\rangle$, tal como queriamos probar.

**[3]** Un oscilador armonico de frecuencia $\omega$ se encuentra en el instante de tiempo $t = 0$ en el estado:

$$|\psi(0)\rangle \;=\; a\, a^{\dagger} \left[a^{\dagger} \;+\; 1\right] |0\rangle \;,$$

donde $a$ y $a^{\dagger}$ son los operadores escalera del oscilador y $|0\rangle$ es el vector correspondiente al estado fundamental. ¿Cual es el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ para un instante de tiempo $t > 0$?.

**Solucion**

Para obtener el vector de estado en $t > 0$, observemos que:

$$a\,(a^{\dagger})^2|0\rangle \;=\; \sqrt{2}\, a\,|2\rangle \;=\; 2\,|1\rangle \;, \qquad\qquad a\, a^{\dagger}\,|0\rangle \;=\; a\,|1\rangle \;=\; |0\rangle \;.$$

Tengamos ahora en cuenta que el estado $|n\rangle$ evoluciona en el tiempo en la forma:

$$|n\rangle \;\to\; e^{-\frac{i}{\hbar}\,E_n\,t}\,|n\rangle \;=\; e^{-i\,\omega\,\left(n+\frac{1}{2}\right)t}\,|n\rangle \;,$$

puesto que los autovalores de la energia del oscilador son $E_n \;=\; \hbar\,\omega\,\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Asi pues, el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ es:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; e^{-\frac{i\,\omega\,t}{2}} \left[2\,e^{-i\,\omega\,t}\,|1\rangle \;+\; |0\rangle\right] \;.$$

Este resultado tambien puede escribirse en la forma:

$$\boxed{|\psi(t)\rangle \;=\; e^{-\frac{i\,\omega\,t}{2}}\; a\, a^{\dagger} \left[e^{-i\,\omega\,t}\, a^{\dagger} \;+\; 1\right] |0\rangle}$$

**[4]** El Hamiltoniano de un sistema viene dado por

$$H = a^{\dagger}a + \frac{1}{2} + \eta(a^{\dagger}a^{\dagger} + a\,a),$$

donde $|\eta| < 1/2$ y $a$ y $a^{\dagger}$ son los operadores de aniquilación y de creación del oscilador armónico y verifican la relación de conmutación

$$[a, a^{\dagger}] = 1.$$

Introdúzcanse dos nuevos operadores, $A$ y $A^{\dagger}$, tales que

$$[A, A^{\dagger}] = 1.$$

y

$$a = \alpha A + \beta A^{\dagger}, \qquad a^{\dagger} = \alpha A^{\dagger} + \beta A,$$

con $\alpha, \beta$ reales, de forma que $H$ no tenga términos $A^{\dagger}A^{\dagger}$ ni $AA$. Calcúlense a partir de estos operadores los autoestados y autovalores de $H$.

**Solucion**

Estudiemos en primer lugar las transformaciones de los operadores de creacion y aniquilacion que preservan las relaciones de conmutacion. Para ello expresemos el conmutador de los operadores originales $a$ y $a^\dagger$ en terminos del de los operadores transformados $A$ y $A^\dagger$:

$$[a, a^\dagger] \,=\, \alpha^2\,[A, A^\dagger] \,+\, \beta^2\,[A^\dagger, A] \,=\, \alpha^2 \,-\, \beta^2 \;,$$

donde hemos impuesto que $[A, A^\dagger] = -[A^\dagger, A] = 1$. Dado que $[a, a^\dagger] = 1$, esta ecuacion es equivalente a la siguiente condicion de los coeficientes $\alpha$ y $\beta$:

$$\alpha^2 \,-\, \beta^2 \,=\, 1 \;.$$

Esta relacion puede resolverse si $\alpha$ y $\beta$ son respectivamente un coseno y seno hiperbolico de una misma constante $\gamma$:

$$\alpha \,=\, \cosh\gamma \;, \qquad\qquad \beta \,=\, \sinh\gamma \;.$$

Escribamos ahora los diferentes terminos que aparecen en el hamiltoniano $H$ en terminos de los nuevos operadores $A$ y $A^\dagger$. Consideremos en primer lugar el producto $a^\dagger\, a$:

$$a^\dagger\, a \,=\, (\alpha A^\dagger + \beta A)(\alpha A + \beta A^\dagger) \,=\, \alpha\,\beta\big[(A^\dagger)^2 + A^2\big] \,+\, \alpha^2\, A^\dagger\, A \,+ \beta^2\, A\, A^\dagger \;.$$

Teniendo en cuenta que:

$$A\, A^\dagger \,=\, A^\dagger\, A \,+\, [A, A^\dagger] \,=\, 1 \,+ A^\dagger\, A \;,$$

podemos escribir:

$$a^\dagger\, a \,=\, \alpha\,\beta\big[(A^\dagger)^2 + A^2\big] \,+\, (\alpha^2 + \beta^2)\, A^\dagger\, A \,+\, \beta^2 \;.$$

De forma similar:

$$a^\dagger\, a^\dagger \,=\, (\alpha A^\dagger + \beta A)(\alpha A^\dagger + \beta A) \,=\, \alpha^2\,(A^\dagger)^2 \,+\, \beta^2\, A^2 \,+\, \alpha\beta\,(A\, A^\dagger + A^\dagger\, A) \;,$$

y usado de nuevo la relacion de conmutacion de $A$ y $A^\dagger$ llegamos a:

$$a^\dagger\, a^\dagger \,=\, \alpha^2\,(A^\dagger)^2 \,+\, \beta^2\, A^2 \,+\, 2\alpha\beta\, A^\dagger\, A \,+\, \alpha\beta \;.$$

Tomando el hermitico conjugado de este resultado, obtenemos:

$$a\, a \,=\, \alpha^2\, A^2 \,+ \beta^2\,(A^\dagger)^2 \,+\, 2\alpha\beta\, A^\dagger\, A \,+\, \alpha\beta \;.$$

Con estos resultados podemos escribir la expresion del hamiltoniano en terminos de los operadores $A$ y $A^\dagger$:

$$H \,=\, (\alpha^2 + \beta^2 + 4\eta\,\alpha\beta)\, A^\dagger\, A \,+\, (\alpha\beta \,+\, \eta\alpha^2 + \eta\beta^2)\big[(A^\dagger)^2 + A^2\big] \,+\, \frac{1}{2} \,+\, \beta^2 \,+\, 2\eta\,\alpha\beta \;.$$

Para que se anulen en $H$ los terminos $AA$ y $A^\dagger A^\dagger$ debemos de imponer la siguiente condicion a los coeficientes $\alpha$ y $\beta$:

$$\alpha\beta \,+\, \eta\,(\alpha^2+\beta^2) \,=\, 0 \;.$$

Observemos que, teniendo en cuenta que $\alpha^2-\beta^2=1$, podemos escribir el termino constante en $H$ como:

$$\frac{1}{2} \,+\, \beta^2 \,+\, 2\eta\,\alpha\beta \,=\, \frac{1}{2}\big[\alpha^2+\beta^2+4\eta\,\alpha\beta\big] \;,$$

y, en consecuencia, el hamiltoniano puede escribirse como:

$$H \,=\, \Big(\alpha^2+\beta^2+4\eta\,\alpha\beta\Big)\,\Big(A^\dagger\,A \,+\, \frac{1}{2}\Big) \;,$$

que es la forma habitual del hamiltoniano de un oscilador con operadores de creacion y aniquilacion $A$ y $A^\dagger$. La frecuencia de este oscilador es simplemente el coeficiente de $A^\dagger\,A \,+\, \frac{1}{2}$ en el hamiltoniano escrito mas arriba. Caculemos este coeficiente en terminos de $\eta$. Observemos, en primer lugar que:

$$\alpha\,\beta \,=\, \cosh\gamma\sinh\gamma \,=\, \frac{\sinh 2\gamma}{2} \;, \qquad\qquad \alpha^2+\beta^2 \,=\, \cosh^2\gamma \,+\, \sinh^2\gamma \,=\, \cosh 2\gamma \;,$$

donde hemos usado la parametrizacion de las soluciones de la condicion $\alpha^2-\beta^2=1$ en terminos de $\gamma$ y las formulas de las funciones hiperbolicas de angulo doble. Substituyendo estos resultados en la condicion obtenida mas arriba para que los terminos $AA$ y $A^\dagger A^\dagger$ se anulen, obtenemos el valor de $\gamma$ como funcion de $\eta$:

$$\tanh 2\gamma \,=\, -2\,\eta \;.$$

Teniendo en cuenta este valor de $\tanh 2\gamma$, escribamos $\sinh 2\gamma$ y $\cosh 2\gamma$ en la forma:

$$\sinh 2\gamma \,=\, -\frac{2\eta}{C} \;, \qquad\qquad \cosh 2\gamma \,=\, \frac{1}{C} \;,$$

siendo $C$ una constante a determinar a partir de la condicion:

$$1 \,=\, \cosh^2 2\gamma \,-\, \sinh^2 2\gamma \,=\, \frac{1-4\eta^2}{C^2} \qquad\Longrightarrow\qquad C \,=\, \sqrt{1-4\eta^2} \;.$$

Utilizando este valor de $C$, podemos escribir:

$$\sinh 2\gamma \,=\, -\frac{2\eta}{\sqrt{1-4\eta^2}} \;, \qquad\qquad \cosh 2\gamma \,=\, \frac{1}{\sqrt{1-4\eta^2}} \;,$$

y entonces:

$$\alpha\,\beta \,=\, -\frac{\eta}{\sqrt{1-4\eta^2}} \;, \qquad\qquad \alpha^2 \,+\, \beta^2 \,=\, \frac{1}{\sqrt{1-4\eta^2}} \;.$$

Por lo tanto, el coeficiente de $A^\dagger A$ en el hamiltoniano $H$ es:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 4\eta\,\alpha\beta \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-4\eta^2}} \;-\; \frac{4\,\eta}{\sqrt{1-4\eta^2}} \;=\; \sqrt{1-4\eta^2}\;.$$

En definitiva, el hamiltoniano del sistema puede escribirse como:

$$\boxed{H \;=\; \sqrt{1-4\eta^2}\,\left(A^\dagger\,A \,+\, \frac{1}{2}\right)}$$

Los autoestados de este hamiltoniano se otienen a partir del estado fundamental $|0\rangle$ actuando con el operador $A^\dagger$:

$$\boxed{|n\rangle \;=\; \frac{\left(A^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}}\;|0\rangle} \qquad\qquad A\,|0\rangle \;=\; 0\;,$$

y los niveles de energia $E_n$ son:

$$\boxed{E_n \;=\; \sqrt{1-4\eta^2}\,\left(n + \frac{1}{2}\right)} \qquad\qquad n \;=\; 0, 1, \cdots$$

**[5]** Escríbanse los operadores $X$ y $P$ de un oscilador armónico unidimensional en la imagen de Heisenberg. Obtengase una expresion de dichos operadores en funcion de los operadores de creacion y aniquilacion del oscilador.

**Solucion**

Escribamos la relacion entre los operadores posicion y momento del oscilador en la imagen de Heisenberg y los operadores escalera:

$$X_H(t) \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\left(a_H(t) + a_H^\dagger(t)\right)\;, \qquad\qquad P_H(t) \;=\; i\,\sqrt{\frac{\hbar\,m\,\omega}{2}}\,\left(a_H^\dagger(t) - a_H(t)\right)\;,$$

donde $a_H(t)$ y $a_H^\dagger(t)$ se relacionan con los correspondientes operadores en la imagen de Schrödinger en la forma:

$$a_H(t) \;=\; e^{\frac{i}{\hbar}\,H\,t}\,a\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,t}\;, \qquad\qquad a_H^\dagger(t) \;=\; e^{\frac{i}{\hbar}\,H\,t}\,a^\dagger\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,t}\;.$$

El operador $H$ en esta ultima ecuacion es el operador hamiltoniano del oscilador, es decir $H \;=\; \hbar\,\omega\,(a^\dagger\,a + \frac{1}{2})$. Teniendo en cuenta que el termino constante en $H$ igual a $\hbar\omega/2$ conmuta con $a$ y, por tanto se cancela en la expresion de $a_H(t)$, podemos escribir:

$$a_H(t) \,=\, e^{i\,a^\dagger\,a\,\omega\,t}\,a\,e^{-i\,a^\dagger\,a\,\omega\,t}\;.$$

Para calcular el segundo miembro de esta expresion usemos la formula de Baker-Campbell-Haussdorf, valida para dos operadores arbitrarios $A$ y $B$:

$$e^A\,B\,e^{-A} \,=\, B\,+[A,B]\,+\frac{1}{2}\,[A,[A,B]]\,+\,\cdots\;.$$

En nuestro caso los operadores $A$ y $B$ son:

$$A\,=\,i\,a^\dagger\,a\,\omega\,t\;, \qquad\qquad B=a\;.$$

Los conmutadores iterados que necesitamos se calculan facilmente usando el conmutador basico entre $a$ y $a^\dagger$, es decir $[a,a^\dagger]=1$. Asi:

$$[A,B]\,=\,i\omega\,t\,[a^\dagger\,a\,,\,a]\,=\,i\omega\,t\,[a^\dagger\,,\,a]\,a\,=\,-i\omega\,t\,a\;,$$

$$[A,[A,B]]\,=\,[i\,a^\dagger\,a\,\omega\,t\,,\,-i\omega\,t\,a]\,=\,(\omega t)^2\,[a^\dagger\,a\,,\,a]\,=\,-(\omega t)^2\,a\,=\,(-i\omega\,t)^2\,a\;.$$

Es facil demostrar que el $n$-esimo conmutador iterado da $(-i\omega\,t)^n\,a$, de forma que $a_H(t)$ es igual a:

$$a_H(t)\,=\,a\,-i\omega\,t\,a\,+\,\frac{1}{2}\,(-i\omega\,t)^2\,a\,+\,\cdots\,+\,\frac{1}{n!}\,(-i\omega\,t)^n\,a\,+\,\cdots\;,$$

que puede escribirse simplemente como:

$$\boxed{a_H(t)\,=\,e^{-i\omega\,t}\,a}$$

Tomando hermitico conjugado de esta ecuacion obtenemos la expresion de $a_H^\dagger(t)$:

$$\boxed{a_H^\dagger(t)\,=\,e^{i\omega\,t}\,a^\dagger}$$

Es inmediato ahora obtener los operadores posicion y momento del oscilador en la imagen de Heisenberg en terminos de los operadores creacion y aniquilacion:

$$\boxed{X_H(t)\,=\,\sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\Big[e^{-i\omega\,t}\,a\,+\,e^{i\omega\,t}\,a^\dagger\Big]} \qquad \boxed{P_H(t)\,=\,i\,\sqrt{\frac{\hbar\,m\,\omega}{2}}\,\Big[e^{i\omega\,t}\,a^\dagger\,-\,e^{-i\omega\,t}\,a\Big]}$$

**[6]** Consideremos los operadores matriz densidad siguientes:

$$\rho_1 = |z\rangle\langle z| \ , \qquad \text{con} \quad |z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \ , \quad z \in \mathbb{C} \ ,$$

$$\rho_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!} e^{-\alpha^2} |n\rangle\langle n| \ .$$

donde $|n\rangle$ son los estados propios normalizados del oscilador armónico.

a) Calculese $\mathrm{Tr}\,\rho_1^2$ y $\mathrm{Tr}\,\rho_2^2$. Comparese e interpretese los dos resultados obtenidos.

b) Muestrese que $a|z\rangle = z|z\rangle$ si $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Calculese $\langle a\rangle_{\rho_1}$ y $\langle a\rangle_{\rho_2}$.

**Solucion**

Es inmediato apreciar que el operador densidad $\rho_1$ corresponde a un estado puro, $\rho_1^2 = \rho_1$ (ya que $\langle z|z\rangle = 1$), mientras que esto no es así para $\rho_2$.

a) Calculemos las trazas de estos operadores densidad:

$$\mathrm{Tr}\rho_1^2 = \mathrm{Tr}\rho_1 = 1 \ ,$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\rho_2^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|\rho_2^2|n\rangle = \sum_{n,k,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{k!} \frac{\alpha^{2m}}{m!} e^{-2\alpha^2} \langle n|k\rangle\langle k|m\rangle\langle m|n\rangle \\ &= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{k!} \frac{\alpha^{2n}}{n!} e^{-2\alpha^2} \langle n|k\rangle\langle k|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4n}}{n!^2} e^{-2\alpha^2} \ . \end{aligned}$$

Es inmediato que $\mathrm{Tr}\rho_2^2 < 1$,

$$\mathrm{Tr}\rho_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{4n}}{n!^2} e^{-2\alpha^2} < \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{n!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2m}}{m!} \right) e^{-2\alpha^2} = 1 \ ,$$

por lo tanto, $\mathrm{Tr}\rho_2^2 < \mathrm{Tr}\rho_1^2$, tal como se espera de la comparación entre un *estado mezcla* y un *estado puro*.

b) Si $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$,

$$a|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\, a|n\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}|n-1\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z\, z^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \ ,$$

es decir, $a|z\rangle = z|z\rangle$. El valor esperado $\langle a\rangle_{\rho_1}$ resulta

$$\begin{aligned}\langle a\rangle_{\rho_1} &= \mathrm{Tr}\,(a\rho_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|a\rho_1|n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|a|z\rangle\langle z|n\rangle = z\sum_{n=0}^{\infty}\langle n|z\rangle\langle z|n\rangle \\ &= z\sum_{n=0}^{\infty}\langle z|n\rangle\langle n|z\rangle = z\langle z|z\rangle = z\ .\end{aligned}$$

Mientras que el valor esperado $\langle a\rangle_{\rho_2}$ es

$$\begin{aligned}\langle a\rangle_{\rho_2} &= \mathrm{Tr}\,(a\rho_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|a\rho_2|n\rangle = e^{-\alpha^2}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2m}}{m!}\langle n|a|m\rangle\langle m|n\rangle \\ &= e^{-\alpha^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}}{n!}\langle n|a|n\rangle = 0\ ,\end{aligned}$$

ya que $a|n\rangle \sim |n-1\rangle$, que es ortogonal a $\langle n|$.

**[7]** Considerese un oscilador armonico unidimensional con estado fundamental $|0\rangle$. Un estado **coherente** $|\alpha\rangle$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, se define como:

$$|\alpha\rangle \;=\; D(\alpha)\,|0\rangle\ ,$$

siendo $D(\alpha)$ el llamado operador desplazamiento, que se define en terminos de los operadores escalera $a$ y $a^\dagger$ como:

$$D(\alpha) \;=\; \exp\left[\alpha\, a^\dagger \;-\; \alpha^*\, a\right]\ .$$

a) Demuestrese que $D(\alpha)$ es unitario y que:

$$D^\dagger(\alpha)\, a\, D(\alpha) \;=\; a+\alpha\ , \qquad\qquad D^\dagger(\alpha)\, a^\dagger\, D(\alpha) \;=\; a^\dagger+\alpha^*$$

b) Obtenganse los valores medios de los operadores $H$, $X$ y $P$ en el estado $|\alpha\rangle$.

**Solucion**

a) Probemos en primer lugar que:

$$D(\alpha) \;=\; e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\, e^{\alpha\, a^\dagger}\, e^{-\alpha^*\, a} \;=\; e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\, e^{-\alpha^*\, a}\, e^{\alpha\, a^\dagger}\ .$$

Para ello usaremos las identidades de Glauber:

$$e^{A+B} \;=\; e^{A}\, e^{B}\, e^{-\frac{1}{2}\,[A,B]} \;=\; e^{B}\, e^{A}\, e^{\frac{1}{2}\,[A,B]}\ ,$$

que son validas cuando $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. Apliquemos estas identidades tomando $A = \alpha\, a^\dagger$ y $B = -\alpha^*\, a$. Entonces $[A,B] = -\alpha\,\alpha^*\,[a^\dagger, a] \,=\, |\alpha|^2$ y

$$e^{\alpha\, a^\dagger \,-\, \alpha^*\, a} \,=\, e^{\alpha\, a^\dagger}\, e^{-\alpha^*\, a}\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \,=\, e^{-\alpha^*\, a}\, e^{\alpha\, a^\dagger}\, e^{\frac{|\alpha|^2}{2}} \,,$$

que es lo que queriamos probar. Tomando el conjugado hermitico de esta ultima ecuacion obtenemos:

$$D^\dagger(\alpha) \,=\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\, e^{-\alpha\, a^\dagger}\, e^{\alpha^*\, a} \,=\, e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\, e^{\alpha^*\, a}\, e^{-\alpha\, a^\dagger} \,.$$

Entonces:

$$D^\dagger(\alpha)\, D(\alpha) \,=\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\, e^{-\alpha\, a^\dagger}\, e^{\alpha^*\, a}\, e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\, e^{-\alpha^*\, a}\, e^{\alpha\, a^\dagger} \,=$$

$$=\, e^{-\alpha\, a^\dagger}\, e^{\alpha^*\, a}\, e^{-\alpha^*\, a}\, e^{\alpha\, a^\dagger} \,=\, e^{-\alpha\, a^\dagger}\, e^{\alpha\, a^\dagger} \,=\, 1 \,.$$

De forma similar

$$D(\alpha)\, D^\dagger(\alpha) \,=\, e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\, e^{\alpha\, a^\dagger}\, e^{-\alpha^*\, a}\, e^{\frac{|\alpha|^2}{2}}\, e^{\alpha^*\, a}\, e^{-\alpha\, a^\dagger} \,==$$

$$=\, e^{\alpha\, a^\dagger}\, e^{-\alpha^*\, a}\, e^{\alpha^*\, a}\, e^{-\alpha\, a^\dagger} \,=\, e^{\alpha\, a^\dagger}\, e^{-\alpha\, a^\dagger} \,=\, 1 \,,$$

que completa la demostracion de la unitariedad de $D(\alpha)$. Observemos que esta condicion puede escribirse como:

$$\boxed{D^\dagger(\alpha) \,=\, D^{-1}(\alpha) \,=\, D(-\alpha)}$$

Calculemos ahora $D^\dagger(\alpha)\, a\, D(\alpha)$. Para ello usemos la formula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^L\, A\, e^{-L} \,=\, A \,+\, [L\,,\, A] \,+\, \frac{1}{2!}\,[L,[L,A]] \,+\, \cdots \,,$$

con $L = \alpha^*\, a \,-\, \alpha\, a^\dagger$ y $A = a$. Puesto que:

$$[L\,,\, A] \,=\, [\alpha^*\, a \,-\, \alpha\, a^\dagger\,,\, a] \,=\, -\alpha\,[a^\dagger\,,\, a] \,=\, \alpha \,,$$

$$[L,[L,A]] \,=\, [\alpha^*\, a \,-\, \alpha\, a^\dagger\,,\, \alpha] \,=\, 0 \,,$$

los demas conmutadores iterados son nulos. Por consiguiente:

$$D^\dagger(\alpha)\, a\, D(\alpha) \,=\, D(-\alpha)\, a\, D(\alpha) \,=\, e^L\, A\, e^{-L} \,=\, A \,+\, [L\,,\, A] \,=\, a + \alpha \,,$$

que es lo que queriamos demostrar. Observemos que la ecuacion $D^\dagger(\alpha)\, a^\dagger\, D(\alpha) \,=\, a^\dagger \,+\, \alpha^*$ se obtiene tomando el hermitico conjugado de la ecuacion que acabamos de demostrar.

b) Observemos en primer lugar que la condicion de normalizacion de los estados coherentes se satisface como consecuencia de la unitariedad del operador de desplazamiento. En efecto, puesto que $\langle\alpha| = \langle 0| D^\dagger(\alpha)$, se tiene

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle 0| D^\dagger(\alpha) D(\alpha) |0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1 .$$

Tambien se pueden utilizar las relaciones probadas en el apartado a) para probar que el estado $|\alpha\rangle$ es un autoestado del operador $a$ con autovalor $\alpha$:

$$\boxed{a|\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle}$$

En efecto, multiplicando por la izquierda por $D(\alpha)$ la primera de las relaciones del apartado anterior, despues de utilizar la condicion de unitariedad de $D(\alpha)$, obtenemos:

$$a D(\alpha) = D(\alpha)\big(a + \alpha\big) .$$

Entonces

$$a|\alpha\rangle = a D(\alpha) |0\rangle = D(\alpha)\big(a + \alpha\big) |0\rangle = \alpha D(\alpha) |0\rangle = \alpha |\alpha\rangle ,$$

tal como queriamos demostrar. Hagamos uso de estos resultados para calcular el valor medio de la energia en el estado $|\alpha\rangle$:

$$\langle H\rangle_\alpha = \langle\alpha|H|\alpha\rangle = \hbar\omega \langle\alpha|\Big(a^\dagger a + \frac{1}{2}\Big)|\alpha\rangle = \hbar\omega \Big[\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle + \frac{1}{2}\Big] .$$

Ahora bien, puesto que $\langle\alpha| a^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$, se tiene:

$$\langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = \alpha^* \alpha \langle\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2 ,$$

y el valor medio de la energia buscado es:

$$\boxed{\langle H\rangle_\alpha = \hbar\omega \Big[|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\Big]}$$

Calculemos ahora el valor esperado de la posicion y el momento en el estado coherente. Recordemos que $X$ y $P$ estan relacionados con los operadores escalera en la forma:

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2 m\omega}} \Big(a + a^\dagger\Big) , \qquad P = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \Big(a^\dagger - a\Big) ,$$

Usando esta relacion el calculo se reduce al el del valor medio de los operadores $a$ y $a^\dagger$. Este ultimo se obtiene inmediatamente como consecuencia del hecho que $|\alpha\rangle$ es un autoestado de $a$. Se tiene:

$$\langle\alpha| a |\alpha\rangle = \alpha , \qquad \langle\alpha| a^\dagger |\alpha\rangle = \alpha^* .$$

En efecto, podemos escribir:

$$\langle X\rangle_\alpha \;=\; \langle\alpha|X|\alpha\rangle \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\Big(\langle\alpha|\,a\,|\alpha\rangle + \langle\alpha|\,a^\dagger\,|\alpha\rangle\Big) \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,(\alpha+\alpha^*)\;,$$

y en definitiva obtenemos:

$$\boxed{\langle X\rangle_\alpha \;=\; \sqrt{\frac{2\,\hbar}{m\,\omega}}\,\mathrm{Re}\,(\alpha)}$$

Porcdemos de forma similar para calcular el valor medio de $P$:

$$\langle P\rangle_\alpha \;=\; \langle\alpha|P|\alpha\rangle \;=\; i\,\sqrt{\frac{\hbar\,m\,\omega}{2}}\,\Big(\langle\alpha|\,a^\dagger\,|\alpha\rangle - \langle\alpha|\,a\,|\alpha\rangle\Big) \;=\; i\,\sqrt{\frac{\hbar\,m\,\omega}{2}}\,(\alpha^*-\alpha)\;,$$

o, equivalentemente:

$$\boxed{\langle P\rangle_\alpha \;=\; \sqrt{2\,\hbar\,m\,\omega}\,\mathrm{Im}\,(\alpha)}$$

**[8]** Una particula de masa $m$ y carga electrica $q$ se mueve en una dimension bajo la accion de una fuerza armonica y de un campo electrico constante $\mathcal{E}$. El hamiltoniano del sistema es:

$$H \;=\; \frac{P^2}{2m} \;+\; \frac{m\omega^2}{2}\,X^2 \;-\; q\,\mathcal{E}\,X$$

a) Obtenganse los niveles de energia del sistema

b) Supongase que el sistema esta inicialmente en el estado fundamental del oscilador con campo electrico nulo. ¿ Cual es la probabilidad de encontrarlo en el estado fundamental del oscilador con $\mathcal{E} \neq 0$?.

c) Si el oscilador esta en en instante $t = 0$ en el estado fundamental del hamiltoniano con $\mathcal{E} = 0$, ¿ cual es la probabilidad de encontrarlo en ese mismo estado en un instante posterior $t > 0$?.

**Solucion**

a) Reescribamos $H$ completando cuadrados en la coordenada $X$:

$$H \;=\; \frac{P^2}{2m} \;+\; \frac{m\omega^2}{2}\left(X^2 \;-\; \frac{2\,q\,\mathcal{E}}{m\,\omega^2}\right) \;=$$

$$=\frac{P^2}{2m} \;+\; \frac{m\omega^2}{2}\left(X \;-\; \frac{q\,\mathcal{E}}{m\,\omega^2}\right)^2 \;-\; \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{q\,\mathcal{E}}{m\,\omega^2}\right)^2\;,$$

que puede ponerse como:

$$H \,=\, \frac{P^2}{2m} \,+\, \frac{m\omega^2}{2} \Big(X \,-\, l\Big)^2 \,-\, \frac{q^2\,\mathcal{E}^2}{2\,m\,\omega^2} \ ,$$

siendo:

$$l \,\equiv\, \frac{q\,\mathcal{E}}{m\,\omega^2}$$

Este hamiltoniano puede relacionarse con el del oscilador armonico con campo electrico nulo por medio del operador de traslacion. En efecto, puesto que:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\,X\,e^{\frac{i}{\hbar}\,l\,P} \,=\, X - l \ ,$$

esta claro que:

$$H \,==\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\,H_0\,e^{\frac{i}{\hbar}\,l\,P} \,-\, \frac{q^2\,\mathcal{E}^2}{2\,m\,\omega^2} \ ,$$

siendo $H_0$ el operador:

$$H_0 \,=\, \frac{P^2}{2m} \,+\, \frac{m\omega^2}{2}\,X^2 \ .$$

Sean $|n\rangle$ los autoestados de $H_0$ con autovalor $E_n \,=\, \hbar\,\omega\big(n + \frac{1}{2}\big)$:

$$H_0\,|n\rangle \,=\, E_n\,|n\rangle \ .$$

Veamos que los autoestados de $H$ son:

$$|\widetilde{n}\rangle \,=\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\,|n\rangle \ .$$

En efecto:

$$\Big(H \,+\, \frac{q^2\,\mathcal{E}^2}{2\,m\,\omega^2}\Big)\,|\widetilde{n}\rangle \,=\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\,H_0\,e^{\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\,|n\rangle \,=$$

$$=\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\,H_0\,|n\rangle \,=\, E_n\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\,|n\rangle \,=\, E_n\,|\widetilde{n}\rangle \ .$$

Es decir:

$$H\,|\widetilde{n}\rangle \,=\, \Big(E_n \,-\, \frac{q^2\,\mathcal{E}^2}{2\,m\,\omega^2}\Big)\,|\widetilde{n}\rangle \,\equiv\, \widetilde{E}_n\,|\widetilde{n}\rangle \ ,$$

siendo $\widetilde{E}_n$ los niveles de energia de $H$:

$$\boxed{\widetilde{E}_n \,=\, \hbar\,\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \,-\, \frac{q^2\,\mathcal{E}^2}{2\,m\,\omega^2}}$$

Por otra parte, si $\psi_n(x) \,=\, \langle x|n\rangle$ son las funciones de onda del oscilador armonico sin campo electrico, las funciones de onda $\widetilde{\psi}_n(x) \,=\, \langle x|\widetilde{n}\rangle$ en presencia de $\mathcal{E}$ se obtienen simplemente trasladando las $\psi_n(x) \,=\, \langle x|n\rangle$:

$$\widetilde{\psi}_n(x) \,=\, \langle x|\widetilde{n}\rangle \,=\, \langle x|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,l\,P}\,|n\rangle \,=\, \langle x - l|n\rangle \ ,$$

o, equivalentemente:

$$\boxed{\widetilde{\psi}_n(x) \,=\, \psi_n(x-l)}$$

b) El estado inicial $|\psi(0)\rangle$ es:

$$|\psi(0)\rangle \,=\, |0\rangle \ .$$

Expresemoslo en terminos de los estados $\widetilde{|n\rangle}$, que diagonalizan el hamiltoniano completo:

$$|\psi(0)\rangle \,=\, |0\rangle \,=\, \sum_n C_n \, |\widetilde{n}\rangle \ ,$$

siendo $C_n$ coeficientes complejos que se determinan mediante el producto escalar:

$$C_n \,=\, \langle \widetilde{n} | 0 \rangle \ .$$

Puesto que:

$$\langle \widetilde{n} | \,=\, \langle n | \, e^{\frac{i}{\hbar}\, l\, P} \ ,$$

entonces:

$$C_n \,=\, \langle n | \, e^{\frac{i}{\hbar}\, l\, P} | 0 \rangle \ .$$

Recordemos ahora que el operador momento $P$ puede ponerse escribirse en terminos de los operadores $a$ y $a^\dagger$ del oscilador con campo electrico nulo. En efecto:

$$P \,=\, -i \sqrt{\frac{m\,\hbar\,\omega}{2}} \left(a \,-\, a^\dagger\right) \ .$$

Por lo tanto:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\, l\, P} \,=\, e^{l \sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}} (a \,-\, a^\dagger)} \ ,$$

y por consiguiente:

$$C_n \,=\, \langle n | \, e^{l \sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}} (a \,-\, a^\dagger)} \, | 0 \rangle \ .$$

Puesto que $a|0\rangle = 0$, para calcular este elemento de matriz es conveniente escribir los operadores de destruccion $a$ en la expresion anterior a la izquierda de los operadores $a^\dagger$. Para ello utilizaremos la identidad de Glauber:

$$e^{A+B} \,=\, e^A \, e^B \, e^{-\frac{1}{2}\,[A,B]} \ ,$$

valida para dos operadores $A$ y $B$ tales que $[[A,B],A] = [[A,B],B] = 0$. En nuestro caso tomaremos:

$$A \,=\, -l \sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}} a^\dagger \ , \qquad\qquad B \,=\, l \sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}} a \ .$$

Como:

$$[A,B] \,=\, -l^2 \, \frac{m\,\omega}{2\,\hbar} \, [a^\dagger \,, a] \,=\, \frac{m\,\omega\, l^2}{2\hbar} \ ,$$

esta claro que $[A, B]$ conmuta con $A$ y con $B$ y, por lo tanto, podemos escribir:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\, l\, P} \;=\; e^{-l\,\sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,a^\dagger}\; e^{l\,\sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,a}\; e^{-\frac{m\,\omega\,l^2}{4\,\hbar}} \quad .$$

Dado que $e^{\alpha\, a}|0\rangle \;=\; |0\rangle$, $\forall\; \alpha \in \mathbb{C}$, podemos concluir que:

$$C_n \;=\; e^{-\frac{m\,\omega\,l^2}{4\,\hbar}}\; \langle n|\, e^{-l\,\sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,a^\dagger}\; |0\rangle \;\; .$$

Para calcular este elemento de matriz desarrollemos la exponencial y usemos que el $p$-esimo estado del oscilador $|p\rangle$ puede escribirse como:

$$|p\rangle \;=\; \frac{(a^\dagger)^p}{\sqrt{p!}}\,|0\rangle \;\; .$$

Obtenemos:

$$\langle n|\, e^{-l\,\sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,a^\dagger}\; |0\rangle \;=\; \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!}\left(\frac{m\,\omega\,l^2}{2\hbar}\right)^{\frac{p}{2}} \langle n|\,(a^\dagger)^p\,|0\rangle \;=\; \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p!}}\left(\frac{m\,\omega\,l^2}{2\hbar}\right)^{\frac{p}{2}} \langle n|p\rangle \;\; .$$

Teniendo ahora en cuenta que $\langle n|p\rangle = \delta_{np}$, llegamos a:

$$\langle n|\, e^{-l\,\sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,a^\dagger}\; |0\rangle \;=\; \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\,\omega\,l^2}{2\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} \quad ,$$

y por lo tanto:

$$\boxed{C_n \;=\; \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}\left(\frac{m\,\omega\,l^2}{2\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{m\,\omega\,l^2}{4\,\hbar}}}$$

En un instante de tiempo arbitrario $t > 0$, el estado sera:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,\tilde{E}_n\,t}\, |\widetilde{n}\rangle \;\; .$$

La amplitud de probabilidad de encontrar el sistema en su verdadero estado fundamental $|\widetilde{0}\rangle$ para $t > 0$ es:

$$\langle\widetilde{0}|\psi(t)\rangle \;=\; C_0\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,\tilde{E}_0\,t} \;\; .$$

La correspondiente probabilidad $P_0 \equiv P_{|0\rangle\to|\widetilde{0}\rangle}$ es independiente del tiempo y viene dada por:

$$P_0 \;=\; \left|\langle\widetilde{0}|\psi(t)\rangle\right|^2 \;=\; |C_0|^2 \;\; .$$

Teniendo en cuenta la expresion de $C_0$ obtenida mas arriba, este resultado puede escribirse como:

$$P_0 \;=\; e^{-\frac{m\,\omega\,l^2}{2\,\hbar}} \;=\; e^{-\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}\left(\frac{q\,\mathcal{E}}{m\,\omega^2}\right)^2} \quad .$$

Es decir, finalmente:

$$\boxed{P_0 \;=\; \exp\left[-\frac{q^2\,\mathcal{E}^2}{2\,m\,\hbar\,\omega^3}\right]}$$

c) La amplitud de probabilidad pedida es:

$$\langle 0|\psi(t)\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,\tilde{E}_n\, t}\, \langle 0|\widetilde{n}\rangle$$

Ahora bien:

$$\langle 0|\widetilde{n}\rangle \;=\; \langle \widetilde{n}|0\rangle^* \;=\; C_n^* \;.$$

Por lo tanto:

$$\langle 0|\psi(t)\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,\tilde{E}_n\, t} \;.$$

Para calcular la suma de esta serie tengamos en cuenta que:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\,\tilde{E}_n\, t} \;=\; e^{-i\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,+\,i\,\frac{m\,\omega^2\,l^2}{2\hbar}\,t} \;, \qquad\qquad |C_n|^2 \;=\; \frac{1}{n!}\Big(\frac{m\,\omega\, l^2}{2\hbar}\Big)^n\, e^{-\frac{m\,\omega\, l^2}{2\,\hbar}} \;.$$

Entonces:

$$\langle 0|\psi(t)\rangle \;=\; e^{-\frac{i\omega}{2}t}\, e^{i\,\frac{m\omega^2\, l^2}{2\hbar}t}\, e^{-\frac{m\,\omega\, l^2}{2\,\hbar}}\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\Big(\frac{m\,\omega\, l^2}{2\hbar}\Big)^n\, e^{-i\,n\,\omega\, t} \;=$$

$$= e^{-\frac{i\omega}{2}t}\, e^{i\,\frac{m\omega^2\, l^2}{2\hbar}t}\, e^{-\frac{m\,\omega\, l^2}{2\,\hbar}}\; \exp\Big[\frac{m\,\omega\, l^2}{2\hbar}\, e^{-i\,\omega\, t}\Big] \;,$$

donde hemos utilizado el desarrollo en serie de Taylor de la funcion exponencial para efectuar la suma. La correspondiente probabilidad es:

$$P \;=\; \big|\langle 0|\psi(t)\rangle\big|^2 \;=\; e^{-\frac{m\,\omega\, l^2}{\hbar}}\; \exp\Big[\frac{m\,\omega\, l^2}{2\hbar}\,\big(e^{-i\,\omega\, t} + e^{i\,\omega\, t}\big)\Big] \;=$$

$$=\; e^{-\frac{m\,\omega\, l^2}{\hbar}}\; e^{\frac{m\,\omega\, l^2}{\hbar}\;\cos\omega t} \;.$$

Teniendo en cuenta que $\cos\omega t - 1 = -2\,\mathrm{sen}^2\frac{\omega t}{2}$, obtenemos:

$$P \;=\; \exp\left[\;-\;\frac{2\, m\,\omega\, l^2}{\hbar}\mathrm{sen}^2\frac{\omega t}{2}\right] \;.$$

Escribamos este resultado en terminos del campo electrico $\mathcal{E}$ y de la carga $q$. Puesto que

$$\frac{2\, m\,\omega\, l^2}{\hbar} \;=\; \frac{2\, m\,\omega}{\hbar}\,\Big(\frac{q\,\mathcal{E}}{m\,\omega^2}\Big)^2 \;=\; \frac{2\, q^2\,\mathcal{E}^2}{m\,\hbar\,\omega^3} \;,$$

se tiene finalmente que:

$$\boxed{P \;=\; \exp\left[\;-\;\frac{2\, q^2\,\mathcal{E}^2}{m\,\hbar\,\omega^3}\;\mathrm{sen}^2\frac{\omega t}{2}\right]}$$

**[9]** Encuentrense los niveles de energia de una particula cargada de masa $m$ y carga $q$ moviendose bajo la accion de campos electrico y magnetico constante $\vec{E} = \mathcal{E}\vec{\imath}$ y $\vec{B} = B\,\vec{k}$.

**Solucion**

El campo electrico $\vec{E}$ se puede representar por medio del potencial escalar $\phi = \mathcal{E}\,x$ (es inmediato comprobar que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$). Representemos $\vec{B}$ por medio del siguiente potencial vector $\vec{A}$:

$$\vec{A} = B\,x\,\vec{\jmath} = (0, Bx, 0)\ .$$

Comprobemos que $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$:

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B\,x & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(Bx)\,\vec{k} = B\,\vec{k}\ .$$

El hamiltoniano de la particula es:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - q\,\mathcal{E}\,X = \frac{P_x^2 + P_z^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(P_y - \frac{q\,B\,X}{c}\right)^2 - q\,\mathcal{E}\,X\ .$$

Tratemos de completar cuadrados en $X$ en los dos ultimos terminos. Teniendo en cuenta que $[P_y, X] = 0$, podemos escribir:

$$\frac{1}{2m}\left(P_y - \frac{q\,B\,X}{c}\right)^2 - q\,\mathcal{E}\,X = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{q^2\,B^2}{2\,m\,c^2}X^2 - \left(q\,\mathcal{E} + \frac{q\,B\,P_y}{m\,c}\right)X\ .$$

Escribamos ahora:

$$\frac{q^2\,B^2}{2\,m\,c^2}X^2 - \left(q\,\mathcal{E} + \frac{q\,B\,P_y}{m\,c}\right)X = \frac{q^2\,B^2}{2\,m\,c^2}\left[(X - X_0)^2 - X_0^2\right]\ ,$$

Siendo $X_0$ un operador a determinar. Para hacerlo, igualemos los terminos lineales en $X$ de esta ultima expresion. Obtenemos:

$$\left(q\,\mathcal{E} + \frac{q\,B\,P_y}{m\,c}\right)X = \frac{q^2\,B^2}{m\,c^2}X_0\ .$$

Entonces, en terminos de la frecuencia de Larmor:

$$\omega = \frac{q\,B}{m\,c}\ ,$$

el operador $X_0$ toma la forma:

$$X_0 \;=\; \frac{1}{m\,\omega^2}\left[q\,\mathcal{E} + \frac{q\,B\,P_y}{m\,c}\right] \;,$$

y el hamiltoniano es:

$$H \;=\; \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2m} \;+\; \frac{1}{2}\,m\omega^2\Big[(X - X_0)^2 - X_0^2\Big] \;.$$

Para diagonalizar $H$ hagamos el siguiente ansatz para la funcion de onda:

$$\psi(x,y,z) \;=\; \varphi(x)\,e^{i\,k_y\,y}\,e^{i\,k_z\,z} \;.$$

Sobre estas funciones los operadores $P_y$ y $P_z$ actuan diagonalmente:

$$P_y\,\psi(x,y,z) \;=\; \hbar\,k_y\,\psi(x,y,z) \;, \qquad\qquad P_z\,\psi(x,y,z) \;=\; \hbar\,k_z\,\psi(x,y,z) \;.$$

Entonces, claramente se verifica:

$$X_0\,\psi(x,y,z) \;=\; x_0\,\psi(x,y,z) \;,$$

siendo $x_0$ la constante:

$$x_0 \;=\; \frac{1}{m\,\omega^2}\left[q\,\mathcal{E} + \frac{q\,\hbar\,k_y}{m\,c}\,B\right] \;.$$

La ecuacion de Schrödinger $H\,\psi \;=\; E\,\psi$ se convierte entonces en la siguiente ecuacion diferencial ordinaria para $\varphi(x)$:

$$\left[-\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2}{dx^2} \;+\; \frac{1}{2}\,m\omega^2\,(x - x_0)^2 \;-\; \frac{1}{2}\,m\omega^2\,x_0^2 \;+\; \frac{\hbar^2\,k_y^2 \;+\; \hbar^2\,k_z^2}{2m}\right]\varphi(x) \;=\; E\,\varphi(x) \;,$$

que es la ecuacion de Schrödinger para un oscilador unidimensional con un minimo de potencial en $x = x_0$ y cuya energia esta desplazada por una constante. Por lo tanto, los niveles de energia son:

$$E_{n,k_y,k_z} \;=\; \hbar\,\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \;-\; \frac{m\,\omega^2\,x_0^2}{2} \;+\; \frac{\hbar^2\,k_y^2 + \hbar^2\,k_z^2}{2m} \;,$$

$$n \;=\; 0\,,\,1\,,\,2\,,\cdots\;, \qquad\qquad k_y\,,\,k_z \;\in\; \mathbb{R} \;.$$

Teniendo en cuenta ahora lo que valen $x_0$ y $\omega$ podemos escribir:

$$-\frac{m\,\omega^2\,x_0^2}{2} + \frac{\hbar^2\,k_y^2}{2m} \;=\; -\frac{1}{2\,m\,\omega^2}\left(q\,\mathcal{E} + \frac{q\,\hbar\,k_y}{m\,c}\,B\right)^2 + \frac{\hbar^2\,k_y^2}{2m} \;=\; -\frac{m\,c^2\,\mathcal{E}^2}{2\,B^2} \;-\; \frac{c\,\hbar\,k_y\,\mathcal{E}}{B} \;.$$

Asi pues, los niveles de energia son:

$$\boxed{E_{n,k_y,k_z} \;=\; \frac{\hbar\,q\,B}{m\,c}\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \;-\; \frac{m\,c^2\,\mathcal{E}^2}{2\,B^2} \;-\; \frac{c\,\hbar\,k_y\,\mathcal{E}}{B} \;+\; \frac{\hbar^2\,k_z^2}{2m}}$$

siendo $n$ un entero no negativo y $k_y$ y $k_z$ dos numeros reales.

**[10]** Sean $a$ y $a^\dagger$ los operadores de aniquilacion y creacion de un oscilador armonico unidimensonal. Considerese un sistema cuyo hamiltoniano es:

$$H \,=\, \hbar\,\omega\,\big(a^\dagger\,a \,+\, \frac{1}{2}\big) \,+\, \hbar\omega\,\lambda\,\big(a^\dagger\big)^2\,a^2 \ ,$$

siendo $\omega$ y $\lambda$ constantes. Obtenganse los niveles de energia del sistema.

**Solucion**

Reescribamos el termino cuartico de $H$ en la forma:

$$\big(a^\dagger\big)^2\,a^2 \,=\, a^\dagger\,a^\dagger a\,a \,=\, a^\dagger\big([a^\dagger, a] + a\,a^\dagger\big)a \,=\, \big(a^\dagger\,a\big)^2 \,-\, a^\dagger\,a \ ,$$

de forma que el hamiltoniano puede ponerse en la forma:

$$H \,=\, \hbar\,\omega\Big(a^\dagger\,a + \frac{1}{2}\Big) \,+\, \hbar\,\omega\lambda\,\big[\big(a^\dagger\,a\big)^2 \,-\, a^\dagger\,a\big] \ .$$

Teniendo en cuenta ahora que:

$$a^\dagger\,a\,|n\rangle \,=\, n\,|n\rangle \ , \qquad\qquad (n = 0, 1, \cdots) \ ,$$

el hamiltoniano es diagonal en la base de los estados $\{|n\rangle\}$:

$$H\,|n\rangle \,=\, \hbar\omega\,\Big(n + \frac{1}{2} + \lambda n^2 - \lambda n\Big)\,|n\rangle \,=\, E_n\,|n\rangle \ ,$$

donde $E_n$ son los niveles de energia pedidos:

$$\boxed{E_n \,=\, \hbar\omega\Big(\lambda\,n^2 \,+\, (1-\lambda)\,n \,+\, \frac{1}{2}\Big)} \qquad\qquad (n = 0, 1, \cdots) \ .$$

[**11**] Un oscilador armonico tiene frecuencia $\omega$. En el instante $t = 0$ se prepara el estado

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \ ,$$

donde $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son los dos primeros autoestados del hamiltoniano del oscilador. Calculese para cualquier instante $t > 0$:

a) El valor medio de la posicion $< X >$

b) El valor medio del momento $< P >$

c) El valor medio $< X\, P >$

**Solucion**

Los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son autoestados de la energia con autovalores $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ y $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$ respectivamente. Por lo tanto cambian en el tiempo de la manera siguiente:

$$|0\rangle \ \rightarrow \ e^{-\frac{i}{\hbar}E_0\, t}|0\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}}|0\rangle \ , \qquad\qquad |1\rangle \ \rightarrow \ e^{-\frac{i}{\hbar}E_1\, t}|1\rangle = e^{-\frac{3i\omega t}{2}}|1\rangle \ .$$

En consecuencia, el vector de estado del sistema en un instante $t \geq 0$ es:

$$\boxed{|\psi(t)\rangle \ = \ \frac{e^{-\frac{i\omega t}{2}}}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{-i\omega t}\,|1\rangle\Big)}$$

a) El operador posicion es:

$$X \ = \ \frac{1}{2\alpha}\,(a + a^\dagger) \ , \qquad\qquad \alpha \ = \ \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \ .$$

A partir de las formulas generales:

$$a\,|n\rangle \ = \ \sqrt{n}\,|n-1\rangle \ , \qquad\qquad a^\dagger\,|n\rangle \ = \ \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \ ,$$

obtenemos:

$$a\,|0\rangle \ = \ 0 \ , \qquad a\,|1\rangle \ = \ |0\rangle \ , \qquad a^\dagger\,|0\rangle \ = \ |1\rangle \ , \qquad a^\dagger\,|1\rangle \ = \ \sqrt{2}\,|2\rangle \ .$$

Utilicemos estas formulas para calcular $\langle\psi|a|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|a|\psi\rangle \ = \ \frac{1}{2}\Big[\Big(\langle 0| + e^{i\omega t}\langle 1|\Big)\Big(a|0\rangle + e^{-i\omega t}a|1\rangle\Big) \ = \ \frac{1}{2}\,e^{-i\omega t} \ .$$

Ademas:

$$\langle\psi|a^\dagger|\psi\rangle \ = \ \langle\psi|a|\psi\rangle^* \ = \ \frac{1}{2}\,e^{i\omega t} \ .$$

Por lo tanto:

$$\langle\psi|\big(a + a^\dagger\big)|\psi\rangle \;=\; \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) \;=\; \cos\omega t\ .$$

Se sigue que el valor esperado de $X$ es:

$$\langle X\rangle \;=\; \frac{\cos\omega t}{2\alpha}\ .$$

Teniendo en cuenta el valor de la constante $\alpha$, podemos escribir:

$$\boxed{\langle X\rangle \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\cos\omega t}$$

b) El operador momento es:

$$P \;=\; \frac{i}{2\beta}\,(a^\dagger - a)\ , \qquad\qquad \beta \;=\; \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\ .$$

Entonces:

$$\langle\psi|(a^\dagger - a)|\psi\rangle \;=\; \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \;=\; i\,\mathrm{sen}\,\omega t\ ,$$

y el valor medio del momento es:

$$\langle P\rangle \;=\; \frac{i}{2\beta}\,i\mathrm{sen}\,\omega t \;=\; -\frac{\mathrm{sen}\,\omega t}{2\beta}\ .$$

Substituyendo el valor esperado de la constante $\beta$, obtenemos:

$$\boxed{\langle P\rangle \;=-\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\mathrm{sen}\,\omega t}$$

c) En terminos de los operadores de creacion y aniquilacion, el operador $XP$ es:

$$XP \;=\; \frac{i}{4\alpha\beta}(a{+}a^\dagger)(a^\dagger{-}a) \;=\; \frac{i}{4\alpha\beta}\big(aa^\dagger{-}aa{+}a^\dagger a^\dagger{-}a^\dagger a\big) = \frac{i}{4\alpha\beta}\big([a,a^\dagger]{-}a^2{+}(a^\dagger)^2\big)\ .$$

donde $\alpha$ y $\beta$ son las constante definidas mas arriba. Teniendo en cuenta que $[a,a^\dagger] = 1$, obtenemos

$$\boxed{XP \;=\; \frac{i}{4\alpha\beta}\big(1 - a^2 + (a^\dagger)^2\big)}$$

Para calcular el valor medio de $XP$ en el estado $|\psi\rangle$ debemos de obtener los valores medios de $a^2$ y de $(a^\dagger)^2$. Puesto que $a|\psi\rangle \propto |0\rangle$, se tiene:

$$a^2|\psi\rangle \;=\; a\big(a|\psi\rangle\big) \propto a|0\rangle \;=\; 0\ .$$

Entonces:

$$\langle\psi|\,a^2\,|\psi\rangle \;=\; 0\ .$$

Por otra parte:

$$\langle\psi|\,(a^\dagger)^2\,|\psi\rangle \;=\; \langle\psi|\,a^2\,|\psi\rangle^* \;=\; 0\ .$$

Se sigue entonces que:

$$\langle\psi|XP|\psi\rangle \;=\; \frac{i}{4\alpha\beta}\langle\psi|\psi\rangle \;=\; \frac{i}{4\alpha\beta}\ .$$

Teniendo en cuenta que $\alpha\beta = (2\hbar)^{-1}$, obtenemos el resultado buscado:

$$\boxed{\langle XP\rangle \;=\; \frac{i\hbar}{2}}$$

Observemos que $\langle XP\rangle$ no es real porque el operador $XP$ no es hermitico ( $(XP)^\dagger = PX \neq XP$).

**[12]** Un oscilador armonico unidimensional de masa $m$ y frecuencia $\omega$ se encuentra en un estado $|\psi\rangle$ que es una superposicion de su estado fundamental $|0\rangle$ y de su primer estado excitado $|1\rangle$. Dicho estado $|\psi\rangle$ es tal que en el instante $t=0$ el valor medio del operador posicion $X$ es el mas grande posible de entre todas las superposiciones de los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

a) Determinese el estado del sistema en $t=0$.

b) Obtengase el valor medio $\langle X\rangle$ y la dispersion $\Delta X$ para $t\geq 0$.

**Solucion**

a) Pongamos

$$|\psi(0)\rangle \;=\; \alpha\,|0\rangle \;+\; \beta|1\rangle\ ,$$

siendo $\alpha$ y $\beta$ dos constante complejas tales que:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 \;=\; 1\ .$$

Calculemos $\langle X\rangle_\psi \;=\; \langle\psi(0)|X|\psi(0)\rangle$ con:

$$X \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\big(a+a^\dagger\big)\ , \qquad a\,|n\rangle \;=\; \sqrt{n}\,|n-1\rangle\ , \qquad a^\dagger\,|n\rangle \;=\; \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ .$$

Con este objetivo, obtengamos primero el resultado de aplicar el operador $X$ al estado $|\psi(0)\rangle$:

$$X|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\Big[\alpha(a+a^\dagger)|0\rangle\,+\beta(a+a^\dagger)|1\rangle\Big] = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\Big[\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle+\sqrt{2}\beta\,|2\rangle\Big]\ .$$

Teniendo en cuenta que $\langle\psi(0)| = \langle 0|\alpha^* + \langle 1|\beta^*$, obtenemos:

$$\langle X\rangle_\psi \,=\, \langle\psi(0)|X|\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\big[\alpha^*\beta + \beta^*\alpha\big]\ .$$

Escribamos los numeros complejos $\alpha$ y $\beta$ en terminos de sus modulos y fases:

$$\alpha \,=\, |\alpha|\,e^{i\chi_\alpha}\ , \qquad\qquad \beta \,=\, |\beta|\,e^{i\chi_\beta}\ .$$

Entonces:

$$\alpha^*\beta + \beta^*\alpha \,=\, |\alpha||\beta|\big[e^{i(\chi_\beta-\chi_\alpha)} \,+\, e^{i(\chi_\alpha-\chi_\beta)}\big] \,=\, 2\,|\alpha||\beta|\cos(\chi_\alpha - \chi_\beta)\ ,$$

y el valor esperado de $X$ en $t = 0$ es:

$$\langle X\rangle_\psi \,=\, \sqrt{\frac{2\hbar}{m\,\omega}}\,|\alpha||\beta|\cos(\chi_\alpha - \chi_\beta)\ .$$

Esta claro que $\langle X\rangle_\psi$ se maximiza si $\chi_\alpha = \chi_\beta$. En ese caso la fase es global y, sin perdida de generalidad, podemos poner $\chi_\alpha = \chi_\beta = 0$. Teniendo en cuenta que $|\beta| = \sqrt{1-|\alpha|^2}$, podemos escribir:

$$\langle X\rangle_\psi \,=\, \sqrt{\frac{2\hbar}{m\,\omega}}\,|\alpha|\,\sqrt{1-|\alpha|^2}\ .$$

Maximizemos esta expresion con respecto a $|\alpha|$. Para ello calculemos la derivada:

$$\frac{d}{d|\alpha|}\,\Big[|\alpha|\,\sqrt{1-|\alpha|^2}\Big] \,=\, \sqrt{1-|\alpha|^2} \,+\, |\alpha|\frac{(-1)|\alpha|}{\sqrt{1-|\alpha|^2}} \,=\, \frac{1-2\,|\alpha|^2}{\sqrt{1-|\alpha|^2}}\ ,$$

que se anula para $|\alpha|^2 = \frac{1}{2}$. Asi pues:

$$|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,$$

y el vector de estado en $t = 0$ es:

$$\boxed{|\psi(0)\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big)}$$

b) El operador de evolucion temporal es:

$$U(t) \,=\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,Ht} \,=\, e^{-i\omega\,(a^\dagger a + \frac{1}{2})t}\ .$$

Entonces:

$$U(t)\,|0\rangle \,=\, e^{-\frac{i\omega}{2}t}\,|0\rangle\ , \qquad\qquad U(t)\,|1\rangle \,=\, e^{-\frac{3i\omega}{2}t}\,|1\rangle\ ,$$

y si definimos

$$\alpha(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{i\omega}{2}t}\;, \qquad\qquad \beta(t) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{3i\omega}{2}t}\;,$$

podemos escribir el estado del sistema en el instante $t \geq 0$ como:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \alpha(t)\,|0\rangle \;+\; \beta(t)|1\rangle$$

Entonces, el valor esperado de $X$ en el instante $t \geq 0$ es:

$$\langle X\rangle_{\psi(t)} \;=\; \langle\psi(t)|X|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\big[\alpha^*(t)\beta(t) + \beta^*(t)\alpha(t)\big] \;=$$

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\Big[\frac{1}{2}e^{\frac{i\omega}{2}t}e^{-\frac{3i\omega}{2}t} \;+\; \frac{1}{2}e^{-\frac{i\omega}{2}t}e^{\frac{3i\omega}{2}t}\Big]\;,$$

que, despues de simplificar se convierte en:

$$\boxed{\langle X\rangle_{\psi(t)} \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\;\cos\omega t}$$

Calculemos ahora $X^2|\psi(t)\rangle$. En primer lugar observemos que, siguiendo los mismos pasos que en el calculo efectuado para el instante $t = 0$, se llega a:

$$X|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\Big[\alpha(t)|1\rangle + \beta(t)|0\rangle + \sqrt{2}\beta(t)\,|2\rangle\Big]\;.$$

Actuando otra vez mas con el operador posicion obtenemos:

$$X^2|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar}{2\,m\,\omega}\,\Big[\alpha(a+a^\dagger)|1\rangle \;+\; \beta(a+a^\dagger)|0\rangle \;+\; \sqrt{2}\,\beta(a+a^\dagger)|2\rangle\Big] \;=$$

$$= \frac{\hbar}{2\,m\,\omega}\,\Big[\beta|1\rangle \;+\; \alpha|0\rangle \;+\; \sqrt{2}\,\alpha|2\rangle \;+\; 2\beta|1\rangle \;+\; \sqrt{6}\,\beta|3\rangle\Big]\;.$$

Teniendo en cuenta que $\langle\psi(t)| \;=\; \langle 0|\alpha^* + \langle 1|\beta^*$, obtenemos:

$$\langle\psi(t)|X^2|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{\hbar}{2\,m\,\omega}\big[\alpha^*\alpha \;+\; \beta^*\beta + 2\,\beta^*\beta\big] \;=\; \frac{\hbar}{2\,m\,\omega}\,\frac{1+1+2}{2}\;,$$

que, simplificando, da:

$$\boxed{\langle X^2\rangle_{\psi(t)} \;=\; \frac{\hbar}{m\omega}}$$

La dispersion pedida es pues:

$$\boxed{\Delta X_{\psi(t)} \;=\; \sqrt{\langle X^2\rangle_{\psi(t)} \;-\; \langle X\rangle^2_{\psi(t)}} \;=\; \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\sqrt{1 - \frac{\cos^2(\omega t)}{2}}}$$

**[13]** El hamiltoniano de un sistema es:

$$H \,=\, \hbar\omega\left(a^\dagger\, a \,+\, \frac{1}{2}\right) \,+\, \hbar\,\Delta\, a^\dagger\, a^2\, a^\dagger \ ,$$

siendo $\omega$ y $\Delta$ dos constantes reales no negativas y $a$ y $a^\dagger$ dos operadores escalera que satisfacen $[a, a^\dagger] = 1$.

a) Obtenganse los niveles de energia exactos del sistema.

b) En el instante inicial $t = 0$ el sistema se encuentra en la siguiente superposicion de su estado fundamental $|0\rangle$ y su primer estado excitado $|1\rangle$:

$$|\psi(0)\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle - i|1\rangle\Big) \ .$$

Obtengase el estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema en el instante de tiempo $t > 0$.

c) Calculese la probabilidad de encontrar el sistema en $t > 0$ en el mismo estado en el que se encontraba en $t = 0$.

**Solucion**

a) Observemos, en primer lugar que:

$$a^\dagger\, a^2\, a^\dagger \,=\, a^\dagger\, a\,([a\, a^\dagger] + a^\dagger a) \,=\, a^\dagger\, a \,+\, (a^\dagger a)^2 \ .$$

Por lo tanto podemos escribir $H$ como:

$$H \,=\, \hbar\omega\left(a^\dagger\, a \,+\, \frac{1}{2}\right) \,+\, \hbar\,\Delta\,\Big(a^\dagger\, a \,+\, (a^\dagger a)^2\Big) \ ,$$

es decir, $H$ puede ponerse en terminos del operador numero $a^\dagger a$:

$$H \,=\, \frac{\hbar\,\omega}{2} \,+\, \hbar\,(\omega + \Delta)\, a^\dagger a \,+\, \hbar\,\Delta(a^\dagger a)^2 \ .$$

En consecuencia, si $|n\rangle$ son los estados tales que $a^\dagger a\,|n\rangle \,=\, n|n\rangle$, para $n = 0, 1, \cdots$, tenemos:

$$H\,|n\rangle \,=\, \Big(\frac{\hbar\,\omega}{2} \,+\, \hbar\,(\omega + \Delta)\, n \,+\, \hbar\,\Delta n^2\Big) \,=\, E_n\,|n\rangle \ ,$$

es decir los estados $|n\rangle$ son autoestados de la energia y los correspondientes autovalores son los niveles de energia que estamos buscando:

$$E_n \,=\, \hbar\Big(\Delta\, n^2 \,+\, (\omega + \Delta)\, n \,+\, \frac{\omega}{2}\Big) \ .$$

b) Obsevervemos que:

$$|0\rangle \;\rightarrow\; \text{estado fundamental} \;\Longrightarrow\; E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\;,$$

$$|1\rangle \;\rightarrow\; \text{primer estado excitado} \;\Longrightarrow\; E_1 = \hbar\left(\frac{3\omega}{2} \,+\, 2\Delta\right)\,.$$

Entonces, dado que $|\psi(0)\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle - i|1\rangle\Big)$, tenemos:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}|0\rangle - ie^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1\rangle\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i\omega}{2}t}|0\rangle - ie^{-i\left(\frac{3\omega}{2}+2\Delta\right)t}|1\rangle\right)\;,$$

que puede escribirse como:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{e^{-\frac{i\omega}{2}t}}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - ie^{-i(\omega+2\Delta)t}|1\rangle\right)\;.$$

c) Tenemos que calcular $\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle$. Teniendo en cuenta que:

$$\langle\psi(0)| \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 0| + i\langle 1|\Big)\;,$$

obtenemos:

$$\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,e^{-\frac{i\omega t}{2}}\left(1 \,+\, e^{-i(\omega+2\Delta)t}\right)\;.$$

La probabilidad buscada es:

$$P(t) \;=\; \Big|\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle\Big|^2 \;=\; \frac{1}{4}\left(1 \,+\, e^{-i(\omega+2\Delta)t}\right)\left(1 \,+\, e^{i(\omega+2\Delta)t}\right) \;=$$

$$=\; \frac{1}{4}\left(1+1+e^{-i(\omega+2\Delta)t}+e^{i(\omega+2\Delta)t}\right) \;=\; \frac{1}{2}\Big(1+\cos\big[(\omega+2\Delta)t\big]\Big)\;.$$

Teniendo en cuenta que $1+\cos x = 2\cos^2(x/2)$, obtenemos finalmente:

$$P(t) \;=\; \cos^2\left[(\frac{\omega}{2}+\Delta)t\right]\;.$$

**[14]** Sean $a$ y $a^\dagger$ los operadores escalera de un oscilador armonico unidimensional y $\lambda$ una constante compleja. Calculense los siguientes productos:

a) $e^{\lambda a}\,a\,a^\dagger\,a\,e^{-\lambda a}$

b) $e^{-\lambda a^\dagger}\,a^2\,\left(a^\dagger\right)^2 e^{\lambda a^\dagger}$

**Solucion**

a) Claramente $e^{\lambda a} a e^{-\lambda a} \, = \, a$. Apliquemos la formula de Baker-Campbell-Haussdorf para calcular $e^{\lambda a} a^\dagger e^{-\lambda a}$:

$$e^{\lambda a} a^\dagger e^{-\lambda a} \, = \, a^\dagger \, + \, \lambda \, [a, a^\dagger] \, + \, \frac{\lambda^2}{2!} \, [a, [a, a^\dagger]] \, + \, \cdots \, .$$

Dado que $[a, a^\dagger] = 1$, solo los dos primeros terminos de esta serie son no nulos y entonces:

$$e^{\lambda a} a^\dagger e^{-\lambda a} \, = \, a^\dagger \, + \, \lambda \, .$$

De lo anterior se sigue que, para cualquier funcion $f$ de $a$ y $a^\dagger$ se verifica que:

$$e^{\lambda a} f(a, a^\dagger) e^{-\lambda a} \, = \, f(a, a^\dagger + \lambda) \, .$$

Entonces, en particular:

$$e^{\lambda a} \, a \, a^\dagger \, a \, e^{-\lambda a} \, = \, a \, (a^\dagger + \lambda) \, a \, .$$

b) Procedamos como en el apartado anterior. Tenemos, en primer lugar que $e^{-\lambda a^\dagger} a^\dagger e^{\lambda a^\dagger} \, = \, a^\dagger$. Ademas:

$$e^{-\lambda a^\dagger} a e^{\lambda a^\dagger} \, = \, a \, - \, \lambda \, [a^\dagger, a] \, + \, \frac{\lambda^2}{2!} \, [a^\dagger, [a^\dagger, a]] \, + \, \cdots \, = \, a + \lambda \, .$$

Para una funcion arbitraria de $a$ y $a^\dagger$ se verifica que:

$$e^{-\lambda a^\dagger} f(a, a^\dagger) e^{\lambda a^\dagger} \, = \, f(a + \lambda, a^\dagger) \, .$$

Entonces:

$$e^{-\lambda a^\dagger} \, a^2 \left(a^\dagger\right)^2 e^{\lambda a^\dagger} \, = \, (a + \lambda)^2 \left(a^\dagger\right)^2 \, .$$